1186 或ル種ノ函數方程式ニ就イテ

春木　博

（神戸高等商船学校）

§1. 抛物線ノ特徴付ケ

抛物線ノ特徴付ケトシテ、次ノ有名ナ定理ガアル。

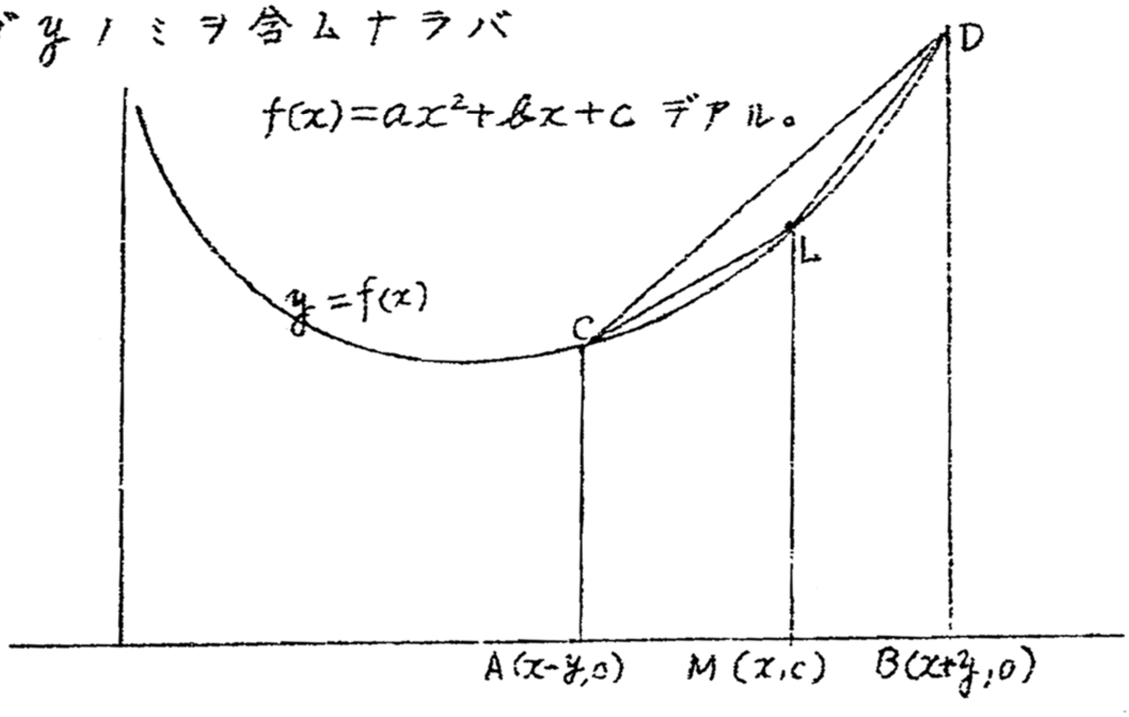
$\boxed{\text{定理}}$ 一ツノ平面曲線ノ平行弦ノ中点ノ軌跡ガ常ニ一定ノ直線ニ平行ナル直線トナレバ此曲線ハ抛物線デアル。（藤原先生、微積分学第一巻284P）

次ニ別ノ方法デ抛物線ヲ特徴付ケテ見ヨウ。

筆者ハ数物記事 Vol. 25, No. 7, July, 1943 ニテ次ノ定理ヲ証明シタ。

$\boxed{\text{定理 1}}$ $f(x)$ ガ $-\infty < x < +\infty$ デ定義サレタ一價實数値可測函数デ且ツ $f(x+y)+f(x-y)-2f(x)$ ガ y ノミヲ含ムナラバ

$f(x)=ax^2+bx+c$ デアル。



茲ニ a, b, c ハ実常数ナリトスル。

此ノ定理ヲ利用スレバ、拋物線ノ特徴付ケトナル。

今変数軸ニ任意ノ二点A, Bヲ取リ、夫々ノ座標ヲ $A(x-y, 0)$, $B(x+y, 0)$ トスル。ABノ中点ヲMトスレバ、ソノ座標ハ $(x, 0)$ デアル。

A, B, M ニ於テ、夫々変数軸ニ垂線ヲ立テ、ぐらふ $y=f(x)$ トノ交点ヲ夫々C, D, Lトスル。

スルト △CLD ノ面積ハ次式デ与ヘラレル。

$$\triangle CLD = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x-y & f(x-y) & 1 \\ x & f(x) & 1 \\ x+y & f(x+y) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} y\{f(x+y)+f(x-y)-2f(x)\}$$

故ニ $\boxed{\text{定理1}}$ ノ幾何学的ナ意義ハ次ノヤウニナル

$y=f(x)$ ガ $-\infty<x<+\infty$ デ定義サレタ一価可測実数値函数デ図ニ於テ △CLD ノ面積ガ y ノミノ函数ナラバ、換言スレバ区間ノ長サ(二平行線AC, BDノ距離) $\overline{AB}$ ノミニ関係スルナラバ $y=f(x)$ ハ(y軸ニ平行ナ主軸ヲ持ツ)拋物線ヲ表ス。(当然ノ注意デアルガ $a=0$ ノトキハ直線トナルカラ、直線ヲ含メテ云フコトニスル)

2. 複素数 z ノ絶對値 $|z|$ ノ特徴付ケ

筆者ハ本紙第257号1144(503P)ニ於テ$|z|$ヲ特徴付ケタガ、次ニ別ナ方法デ$|z|$ヲ特徴付ケテ見ヨウ。

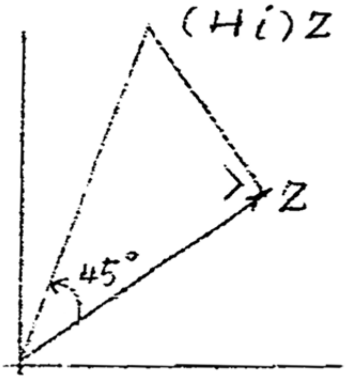
$\boxed{\text{定理2}}$ $f(z)$ガ複素数平面上$|z|<+\infty$デ定義サレタ一價實数値函数トシ、且ツ

1°. $f(z)-|z|$ハ原点デ全微分可能

2°. 任意ノzニ對シ $f\{(1+i)z\}=\sqrt{2}\,f(z)$

ヲ満スナラバ $f(z)=|z|$ デアル。

コノ定理ノ幾何学的意味ハ図ヨリ明カデアラウ。



(証明) $f(z)$ハ實数値ヲ取ル故 $F(x,y)=f(z)-|z|$トオケバ ($z=x+iy$) $F(x,y)$ハ實数値函数デ、假定2°ニ依リ、次ノ函数方程式ヲ満足サセル。

(1) $F(x-y,\,x+y)=\sqrt{2}\,F(x,y)$

(1)ニ於テ $x=0,\ y=0$ トオケバ $F(0,0)=0$

又假定1°ニ依リ $F(x,y)$ハ原点ニ於テ全微分可能ナル故、(1)ヲ用キ簡単ナ計算ニ依リ

$$(2)\quad \begin{cases} F_x(0,0)=0 \\ F_y(0,0)=0 \end{cases}$$

$F(x,y)$ ハ $(0,0)$ デ全微分可能ナル故

$$F(x,y)=F(0,0)+xF_x(0,0)+yF_y(0,0)+\varepsilon\sqrt{x^2+y^2}$$

ト書ケル。茲ニ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\varepsilon=0$ デアル。

$F(0,0)=0$ ト (2) ヲ用ヰルコトニ依リ、結局

(3) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

次ニ

(4) $$g(x,y)\begin{cases} = \dfrac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{for } (x,y)\neq(0,0) \\ = 0 & \text{for } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

ナルヤウ函数 $g(x,y)$ ヲ考ヘレバ (1), (4) ニ依リ $(x,y)\neq(0,0)$ デアッテモ $(x,y)=(0,0)$ デアッテモ $g(x,y)$ ハ次ノ函数方程式ヲ満足サセル。

(5) $$g(x-y,x+y)=g(x,y)$$

且ツ (3) ニヨリ

(6) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0$$

(5) ニ於テ、x, y ノ代リニ夫々 $x-y, x+y$ トオケバ

$$g(-2y,2x)=g(x-y,x+y)$$

上式ト (5) トヨリ

(7) $$g(-2y,2x)=g(x,y)$$

(7) ノ関係ヲ用ヰレバ

$$g(-4x,-4y)=g(-2y,2x)$$

上式ト(7)トニヨリ

(8) $$g(x,y)=g(-4x,-4y)$$

(8)ノ関係ヲ用キレバ

$$g(-4x,-4y)=g(16x,16y)$$

上式ト(8)トニヨリ

$$g(x,y)=g(16x,16y)$$

上式ニ於テ　x, y ノ代リニ夫々 $\frac{x}{16}$, $\frac{y}{16}$ トオケバ

$$g(x,y)=g\left(\frac{x}{16},\frac{y}{16}\right)$$

之ヨリ、任意ノ自然数 n ニ対シ

$$g(x,y)=g\left(\frac{x}{16^n},\frac{y}{16^n}\right)$$

コヽデ、$n\to+\infty$ ナラシムレバ (6) ニヨリ右辺 $\to 0$ トナルカラ　$g(x,y)\equiv 0$

故ニ (4) ニヨリ $(x,y)\neq(0,0)$ ナラバ $F(x,y)\equiv 0$

又 $F(0,0)=0$　ナル故　結局　$F(x,y)\equiv 0$

又定義ニヨリ　$F(x,y)=f(z)-|z|$　ナル故

$$f(z)=|z| \qquad \text{（証明了）}$$

§3. 筆者ハ本紙第262号1170(94P-95P)ニテ次ノ定理ヲ証明シタ。

$\boxed{\text{定理}}$　$f(x)$ ヲ $x>0$ デ定義サレタ一價実数値函数トスルトキ　$f(\alpha x)=f(x)$　$(\alpha>0)$ ヲ $f(x)$ ガ満足スルナラバ

$$f(x)=g(\log x)$$

デアル。茲ニ $g(x)$ ハ $-\infty<x<+\infty$ ニテ定義サレ

ター價實数値函数デ $\log\alpha$ ヲ週期トスル任意ノ週期函数ナリトスル。

之ヲ用キテ次ノ定理ヲ証明シヤウ。

$\boxed{\text{定理}}$ 3. $f(x)$ ヲ $x>0$ デ定義サレター價實数値函数トスルトキ $f(\alpha x)=\alpha f(x)$ $(\alpha>0)$ ナラバ

$$f(x)=xg(\log x)$$

デアル。茲ニ $g(x)$ ハ $-\infty<x<+\infty$ ニテ定義サレター價實数値函数デ $\log\alpha$ ヲ週期トスル任意ノ週期函数ナリトスル。

(証明) $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ トオケバ $F(x)$ ハ $x>0$ デ定義サレター價實数値函数デ $f(\alpha x)=\alpha f(x)$ ナルコトカラ $F(x)$ ハ $x>0$ デ $F(\alpha x)=F(x)$ ヲ充ス。

之カラ先ハ前定理ニ依レバヨイ。

—(完)—